

УДК 681.511.42.037.5(0.45)

А. А. Тунік, д-р техн. наук
Т. А. Галагуз**СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧНИЙ СИНТЕЗ
ЦИФРОВОЇ РОБАСТНОЇ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ**

Інститут електроніки та систем управління НАУ, e-mail: aatunik@mail.ru

Розглянуто проблему синтезу цифрового регулятора для системи при стохастичних збуреннях і неповних вимірах вектора стану, що вирішується з використанням теореми розділення. Показано, що параметрична робастна оптимізація синтезованого регулятора використовується для досягнення якості і стійкості номінальної та параметрично збуреної систем. Наведено приклад синтезу регулятора для малого безпілотного літального апарата.

Постановка завдання

Сьогодні в різних сферах діяльності людини (екологія, метеорологія, військова, сільськогосподарська) широко застосовуються малі безпілотні літальні апарати (БПЛА), тому проблема синтезу ефективної системи управління з урахуванням усіх особливостей є досить актуальною.

Система управління для малого БПЛА з дешевими навігаційними датчиками і бортовим комп'ютером з дуже обмеженими можливостями повинна забезпечувати номінальну якість і стабільність. При цьому необхідно відзначити, що БПЛА мають літати в досить широкому діапазоні змін висоти та повітряних швидкостей. Це призводить до того, що параметри системи змінюються в значних межах.

Крім того, дешеві датчики мають значний рівень власних шумів вимірювань, тому необхідно забезпечити не лише оптимальність, а й робастність системи управління.

У попередній праці [1] було розроблено процедуру структурно-параметричного синтезу робастної неперервної системи управління. На борту БПЛА для реалізації законів управління використовується комп'ютер, тому доцільно синтезувати цифровий регулятор.

Першим етапом синтезу цифрового закону управління для малого БПЛА з урахуванням усіх його зазначених вище особливостей є структурно-параметричний синтез з використанням теореми розділення [2]. Згідно з нею оптимальний регулятор складається з оптимального спостерігача (фільтра Калмана) та оптимального регулятора.

На наступному етапі оптимізували отриману систему управління з використанням NPRS - підходу (Nominal Performance-Robust Stability), що дозволило знайти компроміс між якістю та робастністю [3–5].

Цей підхід базується на використанні H_2 -норми як загальноприйнятої оцінки якості

системи [6] як при детермінованих, так і при стохастичних збуреннях, а також H_∞ -норми функції комплементарної чутливості системи як оцінки її робастності [7].

З практичною метою синтезу використовується багатомодельний підхід, що базується на оцінці якості номінальної і збуреної систем при детермінованому і стохастичному впливах, а також оцінці робастності системи з відповідними ваговими коефіцієнтами – множниками Лагранжа [3–5].

Забезпечення номінальної якості і робастної стійкості можна досягнути, використовуючи складний критерій оптимізації, що включає (з відповідними ваговими коефіцієнтами) H_2 -норми, що обчислені як для детермінованого, так і для стохастичного випадків, а також H_∞ -норми.

Усі ці норми обчислюються як для номінальної, так і для параметрично збуреної моделей об'єкта управління [5]. Це дозволяє регулювати частку детермінованої і стохастичної складових в показник якості, що мінімізується, в той час, як, використовуючи норми H_2 і H_∞ , можна досягнути компромісу між вимогами до компенсації зовнішніх (координатних) і внутрішніх (параметричних) збурень [3–5].

Дослідження проведено на прикладі робастної оптимізації повздовжнього каналу системи управління малого БПЛА.

Синтез оптимальної системи

Розглянемо задачу синтезу оптимальної за середньоквадратичним показником якості систем управління неперервним об'єктом (в нашому випадку літаком) за допомогою цифрового регулятора. Нехай динаміка літака описується системою рівнянь у просторі станів:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}_1 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \boldsymbol{\omega}_2\end{aligned}\quad (1)$$

де $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in R^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in R^{l \times n}$, $\mathbf{D} \in R^{l \times m}$, $1 < n$, $m < n$ – четвірка матриць простору станів літака;

ω_1 – вектор зовнішніх збурень, ω_2 – білий шум датчиків з матрицею коваріацій V_2 .

Стохастичний вектор турбулентної швидкості вітру ω_1 (вектор зовнішніх збурень) описується стандартною моделлю Драйдена [8], що визначає матрицю спектральних щільностей цього вектора. Для формування процесу ω_1 використовується багатомірний формуючий фільтр, вхід якого збурюється векторним білим шумом η . Нехай формуючий фільтр представляється у просторі станів четвіркою матриць

$$[A_f \in R^{p \times p}, B_f \in R^{p \times s}, C_f \in R^{r \times p}, D_f \in R^{r \times s}].$$

Спектральну модель Драйдена і формуючого фільтра описано в праці [3; 4; 8], а конкретну його форму для нашого випадку подано вище.

Приведемо поставлену задачу до стандартної форми, що необхідно для використання теореми розділення [2]. З цієї метою включимо фільтр Драйдена в опис у просторі станів літака [5; 8].

Послідовне з'єднання фільтра Драйдена і моделі БПЛА призводить до розширеної моделі у просторі станів, що має вектор $x_{ex} = [x_f, x]'$ і четвірки матриць простору станів:

$$[A_{ex} \in R^{(p+n) \times (p+n)};$$

$$B_{ex} \in R^{(p+n) \times (s+m)};$$

$$C_{ex} \in R^{l \times (p+n)};$$

$$D_{ex} \in R^{l \times (s+m)}],$$

де

$$\begin{bmatrix} A_{ex} & B_{ex} \\ C_{ex} & D_{ex} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_f & 0_{p \times n} & B_f \\ B_g 0 C_f & A & B_g 0 D_f \\ 0_{l \times p} & C & D \end{bmatrix}.$$

Вхід матриці $B_g 0$ з'єднується з виходом формуючого фільтра, що збурює відповідні змінні у просторі станів БПЛА. Як результат маємо розширену систему у просторі станів:

$$\dot{x}_{ex} = A_{ex} x_{ex} + B_{ex} x_{ex} + \begin{bmatrix} 0_{r \times m} \\ B \end{bmatrix} u + \eta$$

$$y = C_{ex} x_{ex} + D_{ex} x_{ex} + \omega_2,$$

де η і ω_2 – білі шуми, що збурюють стан системи і виміри.

З розмірності матриці C_{ex} видно, що число доступних вимірів значно менше за розмірність вектора стану x_{ex} ($l < n + p$), крім цього в системі присутні білі шуми.

Тому для синтезу управління необхідно застосувати теорему розділення [2], згідно з якою необхідно спочатку розв'язати задачу синтезу

оптимального цифрового спостерігача (оптимального фільтра Калмана) для відновлення повного вектора стану системи x_{ex} .

Для перетворення неперервної величини x_{ex} в дискретну $x(i)$ використовується імпульсний елемент (аналогово-цифровий перетворювач), а дискретної в неперервну – фіксатор нульового порядку (цифро-аналоговий перетворювач).

Для синтезу цифрової оптимальної системи управління перейдемо, використовуючи стандартні процедури, від системи рівнянь (1), що описує неперервний об'єкт, до опису об'єкта в цифровому вигляді. Система рівнянь, що описує цифровий об'єкт, буде мати вигляд:

$$x(i+1) = A_d x(i) + B_d u(i);$$

$$y(i) = C_d x(i) + D_d u(i).$$

Згідно з працею [2] оптимальний цифровий спостерігач, що мінімізує квадратичну похибку між змінними стану реального літака і його моделі $\varepsilon(i) = x_{ex}(i) - \hat{x}(i)$, визначається з виразу:

$$\hat{x}(i+1) = A_d \hat{x}(i) + B_d u(i) + K[y(i) - C_d \hat{x}(i)], \quad (2)$$

де матриця коефіцієнтів підсилення оптимального спостерігача Калмана визначається з виразу

$$K = [A_d Q(i) C_d^T + V_{12}(i)] [V_2(i) + C_d Q(i) C_d^T]^{-1}, \quad (3)$$

а матриця $Q(i)$ дисперсій похибки відновлення:

$$Q(i+1) = [A_d - K C_d] Q(i) A_d^T + V_1(i) - K V_{12}^T(i). \quad (4)$$

Використовуючи повністю відновлений вектор стану системи $\hat{x}(i)$, можна знайти оптимальний детермінований цифровий регулятор, що мінімізує квадратичний функціонал

$$J_d = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt,$$

де Q і R – діагональні матриці, вага кожної змінної стану і управління відповідно в узагальнених функціональних індексах.

Такий регулятор використовує вихідний статичний зворотний зв'язок

$$u(i) = -F \hat{x}(i), \quad i = i_0, i_0 + 1, \dots, i_1 - 1, \quad (5)$$

де F – коефіцієнти підсилення для кожної змінної вектора стану.

Значення коефіцієнтів для виразу (5) знаходяться за формулою:

$$F = [R_2(i) + B_d^T [R_1(i+1) + P(i+1)] B_d]^{-1} B_d^T [R_1(i+1) + P(i+1)] A_d, \quad (6)$$

де $R_1(i), R_2(i)$ – задана послідовність невід'ємно визначених симетричних матриць.

У виразі (6) $P(i)$, $i = i_0, i_0 + 1, \dots, i_1 - 1$ задовольняє матричному різницевому рівнянню

$$P(i) = \mathbf{A}_d^T [R_i(i+1) + P(i+1)] [\mathbf{A}_d - \mathbf{B}_d \mathbf{F}],$$

$$i = i_0, i_0 + 1, \dots, i_1 - 1.$$

Підставивши вираз (5) для закону управління в рівняння спостерігача (2), отримаємо рівняння регулятора:

$$\hat{\mathbf{x}}(i+1) = [\mathbf{A}_d - \mathbf{B}_d \mathbf{F} - \mathbf{K} \mathbf{C}_d] \hat{\mathbf{x}}(i) + \mathbf{K} \mathbf{y}(i).$$

Замкнена система, отримана в результаті з'єднання об'єкта з регулятором, є лінійною системою розмірності $2n$ (де n – розмірність стану \mathbf{x}), яку можна описати рівнянням

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(i+1) \\ \hat{\mathbf{x}}(i+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_d & -\mathbf{B}_d \mathbf{F} \\ \mathbf{K} \mathbf{C}_d & \mathbf{A}_d - \mathbf{K} \mathbf{C}_d - \mathbf{B}_d \mathbf{F} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(i) \\ \hat{\mathbf{x}}(i) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Робастизація оптимальної системи управління польотом

Вимоги робастності до системи управління, що проектується, включають характеристики, в межах яких система повинна зберігати стійкість і допустиму функціональність. Це пов'язано зі зміною фізичних умов функціонування, що призводить до деяких відхилень параметрів моделі від їх “номінальних” значень. Тому ми повинні розглядати принаймні дві моделі: номінальну і хоча б одну, утворену впливом параметричних збурень. Це буде забезпечувати стійкість і функціональність для сімейства моделей.

Такий підхід називається багатомодельним NPRS підходом [5].

Розглянемо дві моделі, що представлені четвірками матриць $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}]$ та $[\mathbf{A}_p, \mathbf{B}_p, \mathbf{C}_p, \mathbf{D}_p]$ для номінальної та параметрично збуреної систем відповідно [3; 4].

Кількість параметрично збурених моделей може бути збільшено до будь-якої величини, якщо про них є інформація.

Відомо, що знайти єдиний закон управління для цих моделей, який би відповідав вимогам до якості і стійкості, проблематично.

Рішення цієї задачі може бути досягнуто за допомогою змішаної оптимізаційної процедури з використанням комплексного показника “робастність – якість” (КПРЯ), що полягає в оцінці якості та робастності для номінальної і збуреної моделей з відповідними коефіцієнтами Лагранжа, ваговий внесок кожної величини в КПРЯ [5; 9].

Елементи матриці коефіцієнтів підсилення \mathbf{F} можуть бути використані як змінні процедури оптимізації. Оптимальні значення цих параметрів, отримані на попередньому етапі, використовуються як початкові дані для оптимізації.

Виконання процедури оптимізації з різними коефіцієнтами Лагранжа дозволяє досягнути ба-

жаного компромісу між показниками “робастність – якість”. При цьому якість системи оцінюється за допомогою H_2 -норми для детермінованого та стохастичного випадків [7; 10].

Розглянемо обидва випадки, оскільки важливо як стабілізувати політ БПЛА в умовах стохастичної турбулентності протягом тривалого часу, так і забезпечити точне виконання детермінованої команди y_0 для зміни висоти, курсу, маршруту і т.д. Це дозволяє досягнути компромісу між якістю в стохастичному та детермінованому випадках [5]. Потрібно розрахувати такі складові КПРЯ для визначення якості номінальної і збуреної систем:

1) H_2 -норму для кожної моделі системи управління (номінальної та параметрично збуреної) в детермінованому випадку, що показує чутливість системи до збурень:

$$J_d = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}]}; \quad (8)$$

2) H_2 -норму кожної моделі в стохастичному випадку:

$$J_d = \sqrt{E_M [\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}]}, \quad (9)$$

де E_M – оператор математичного чекання, що обчислюється за ансамблем; \mathbf{Q} , \mathbf{R} , – діагональні матриці, що враховують вагу кожної змінної в просторі станів \mathbf{Q} управляючих впливів \mathbf{R} .

Оцінка робастності замкнутої номінальної та збуреної систем здійснюється за допомогою H_{∞} -норми комплементарної чутливості:

$$\|T\|_{\infty} = \sup \overline{\sigma(T(j\omega))}, \quad 0 \leq \omega \leq \omega_N, \quad (10)$$

де $\overline{\sigma}$ – максимальне сингулярне число матриці $T(j\omega)$ комплементарної функції чутливості в діапазоні частот $0 \leq \omega \leq \infty$; ω_N – частота Найквіста; $\omega_N = \pi/T_s$, T_s – час дискретизації.

Для обчислення цих норм необхідно визначити такі четвірки матриць:

– для детермінованої замкнутої системи, що отримана в результаті з'єднання об'єкта з регулятором (номінальної і параметрично збуреної):

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{cl} & \mathbf{B}_{cl} \\ \hline \mathbf{C}_{cl} & \mathbf{D}_{cl} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{F} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{K}\mathbf{C} & \mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{F} & \mathbf{0}_{l \times m} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{0}_{l \times m} & \mathbf{D} \end{array} \right]; \quad (11)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{cl}^p & \mathbf{B}_{cl}^p \\ \hline \mathbf{C}_{cl}^p & \mathbf{D}_{cl}^p \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{A}^p & -\mathbf{B}^p \mathbf{F} & \mathbf{B}^p \\ \hline \mathbf{K} \mathbf{C}^p & \mathbf{A}^p - \mathbf{K} \mathbf{C}^p - \mathbf{B}^p \mathbf{F} & \mathbf{0}_{l \times m} \\ \hline \mathbf{C}^p & \mathbf{0}_{l \times m} & \mathbf{D}^p \end{array} \right]; \quad (12)$$

– для стохастичної замкненої системи, що отримана в результаті з'єднання об'єкта з регулятором (номінальної і параметрично збуреної):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{cl} & \mathbf{B}_{cl} \\ \mathbf{C}_{cl} & \mathbf{D}_{cl} \end{bmatrix} = \quad (13)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_f & \mathbf{0}_{p \times n} & \mathbf{0}_{p \times m} & \mathbf{B}_f & \mathbf{0}_{p \times s} \\ \mathbf{B}_g \mathbf{C}_f & \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{F} & \mathbf{B}_g \mathbf{D}_f & \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{l \times p} & \mathbf{K}\mathbf{C} & \mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{F} & \mathbf{0}_{l \times s} & \mathbf{0}_{l \times s} \\ \mathbf{0}_{l \times p} & \mathbf{C} & \mathbf{0}_{l \times m} & \mathbf{0}_{l \times s} & \mathbf{D} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{cl}^p & \mathbf{B}_{cl}^p \\ \mathbf{C}_{cl}^p & \mathbf{D}_{cl}^p \end{bmatrix} = \quad (14)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_f^p & \mathbf{0}_{p \times n} & \mathbf{0}_{p \times m} & \mathbf{B}_f^p & \mathbf{0}_{p \times s} \\ \mathbf{B}_g \mathbf{C}_f^p & \mathbf{A}^p & -\mathbf{B}^p \mathbf{F} & \mathbf{B}_g \mathbf{D}_f^p & \mathbf{B}^p \\ \mathbf{0}_{l \times p} & \mathbf{K}\mathbf{C}^p & \mathbf{A}^p - \mathbf{K}\mathbf{C}^p - \mathbf{B}^p \mathbf{F} & \mathbf{0}_{l \times s} & \mathbf{0}_{l \times s} \\ \mathbf{0}_{l \times p} & \mathbf{C}^p & \mathbf{0}_{l \times m} & \mathbf{0}_{l \times s} & \mathbf{D}^p \end{bmatrix}.$$

У детермінованому випадку H_2 -норма (8) для номінальної та збуреної моделей обчислюються на основі граміана керованості для систем (11), (12) відповідно [6]. Ці четвірки матриць використовуються також для обчислення H_∞ -норми (10).

У стохастичному випадку H_2 -норма (9) для номінальної та збуреної моделей розраховується на основі граміана керованості для систем (13), (14) відповідно [6]. Обчислення цих норм в MatLab виконується з використанням операторів „h2norm” та „hinfnorm” [11].

Отже, комплексний показник “робастність-якість” J_Σ можна записати так [3–5; 9]:

$$J_\Sigma = \lambda_{dn} H_2^{dn} + \lambda_{dp} H_2^{dp} + \lambda_{sn} H_2^{sn} + \lambda_{sp} H_2^{sp} + \\ + \lambda_\infty H_{inf}^n + \lambda_\infty^p H_{inf}^p + PF,$$

де H_2^{dn} , H_2^{sn} – H_2 -норма для номінальної детермінованої і стохастичної моделей відповідно; H_2^{dp} , H_2^{sp} – H_2 -норма для збуреної детермінованої і стохастичної моделей відповідно; H_{inf}^n , H_{inf}^p – H_∞ -норма для номінальної і збуреної моделей; λ_{dn} , λ_{dp} , λ_{sn} , λ_{sp} , λ_∞ , λ_∞^p – відповідні нормам вагові коефіцієнти; PF – штрафна функція.

Збільшуючи чи зменшуючи вагу λ_∞ , λ_∞^p відносно ваги складових якості λ_{dn} , λ_{dp} , λ_{sn} , λ_{sp} , можна досягнути компромісу між якістю і робастністю системи.

Крім цього, можна змінювати елементи вагових матриць \mathbf{Q} і \mathbf{R} , що теж важливо.

Показник “робастність – якість” (15) є функцією вектора змінних параметрів регулятора (автопілоту) $\mathbf{F}(i)$, що включають у себе коефіцієнти підсилення всіх вхідних сигналів.

Оптимізаційна процедура повинна визначити таку величину вектора $\mathbf{F}(i)$, при якій комплексний показник “робастність – якість” досягає мінімуму.

Граміан керованості може бути визначений лише для стійкої і повністю керованої системи. Тому необхідно, щоб під час пошуку мінімального значення комплексного показника якості система залишалась стійкою. З цією метою включаємо до критерію оптимізації штрафну функцію (PF), що обмежує розміщення полюсів замкнутої системи в середині деякої замкненої області M на комплексній площині. Ця область, показана на рис. 1, *a*, обмежена двома напівколами.

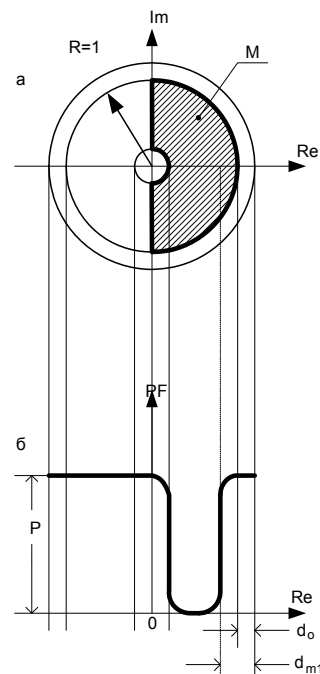


Рис. 1. Штрафна функція на комплексній площині z :

a – розміщення полюсів замкненої системи;
б – залежність $PF(dm)$

Перше коло з більшим радіусом визначає запас стійкості (відстань d_0 до кола з одиничним радіусом).

Друге коло з меншим радіусом визначає максимальну смугу пропускання замкненої системи.

З метою уникнення високочастотних коливань з частотою Найквіста всі полюси замкненої системи повинні розміщуватися всередині правого одиничного напівкола.

Таким чином, допустима область M розміщення полюсів на z -площині подана заштрихованою фігурою на рис. 1, *a*.

Штрафна функція є функцією мінімальної відстані від полюсів номінальної та збуреної систем до кожної з меж області M . Сама ж штрафна функція цієї мінімальної відстані d_m визначається з виразу [3; 4]:

$$PF = \begin{cases} 0, & \text{якщо } d_m \geq d_{m1}; \\ \frac{P}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{\pi(d_m - d_0)}{(d_{m1} - d_0)} \right) \right], & \text{якщо } d_0 < d_m < d_{m1}; \\ P, & \text{якщо } d_m \leq d_0. \end{cases}$$

Величина d_m визначається як мінімум усіх відстаней від полюсів замкненої системи до уявної осі для номінальної та збуреної моделей, P має досить велике значення (наприклад, $P = 10^4 - 10^6$) і призначене для утримання полюсів всередині дозволеної області M .

Графічно штрафна функція подана на рис. 1, б її розрізом вертикальною площиною, що проходить через дійсну вісь.

Також необхідно зазначити, що в оптимізаційній процедурі деякі параметри управління можуть набувати нереально великих значень. У такому випадку корисно додати до комплексного критерію якості обмежуючий член:

$$PF_r = \sum_{r=1}^l \lambda_r p_r^2,$$

де l – число параметрів, що повинні бути зменшені; λ_r – ваговий коефіцієнт.

Після завершення оптимізаційної процедури, з метою можливості реалізації закону управління на БЦОМ, доцільно провести пониження порядку отриманого регулятора. Це пов'язано з тим, що використання фільтра Калмана для відновлення повного вектора стану системи призводить до збільшення її порядку вдвічі. Таку процедуру можна здійснити на основі балансних реалізацій системи [12].

Процедура пониження порядку легко може бути здійснена в MatLab за допомогою використання стандартних операторів „balreal” та „modred” [11]. Пониження порядку, здійснене після процедури робастної оптимізації, значно ефективніше за пониження порядку в оптимальній системі.

Останнім етапом процедури синтезу робастної системи управління є моделювання отриманої системи в пакеті SIMULINK з урахуванням усіх необхідних нелінійних елементів, що входять в реальну систему (насичення, зони нечутливості і т.д.), а також турбулентності вітру. Отже, кінцевий висновок про якість функціонування системи управління можна зробити після її моделювання.

Приклад робастної структурної оптимізації неперервної системи управління повздовжнім рухом

Чисельні дані для наведеного прикладу взято з зарубіжної літератури [3].

Розглянемо режим стабілізації висоти і кута тангажа для малого БПЛА [3]. Компоненти матриці інерції БПЛА приводяться в зв'язаній системі координат, прийнятій в американській літературі [8], де вісь x є повздовжньою віссю літака, вісь y розташована в горизонтальній площині літака і направлена вздовж правого крила, вісь z направлена вниз.

Позначення кута тангажа θ (якому відповідає ϑ у вітчизняній літературі) і кутової швидкості тангажа q (якій відповідає ω_z у вітчизняній літературі) також є загальноприйнятим у зарубіжній літературі.

Управління в повздовжньому русі здійснюється лише рулем висоти. Розглядаються дві моделі: номінальна (при дійсній повітряній швидкості 250 км/год) і збурена (при дійсній повітряній швидкості 200 км/год).

Матриці простору станів A , A_p і управління B , B_p для обох лінійних моделей з вхідним управлінням u , вектором стану x і вектором виходу y мають вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} -0.0345 & 5.9942 & -9.7764 & 0 & 0 \\ -0.0041 & -1.7565 & 0 & 0.9860 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.0033 & -25.6814 & 0 & -2.1905 & 0 \\ 0 & V_t & V_t & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_p = \begin{bmatrix} -0.0273 & 5.9960 & -9.7764 & 0 & 0 \\ -0.0064 & -1.3927 & 0 & 0.9971 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.0036 & -16.1243 & 0 & -1.7339 & 0 \\ 0 & -V_{tp} & V_{tp} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = [0.3576 \quad -0.1628 \quad 0 \quad -31.1037 \quad 0]^T;$$

$$B_p = [0.3581 \quad -0.1303 \quad 0 \quad -19.8857 \quad 0]^T;$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

де матриці збуреної моделі позначаються з індексом p , а як змінні стану використовуються: швидкість V_t , кут атаки α , кут тангажа θ , кутова швидкість тангажа q , висота h .

Під час дослідження стохастичного випадку припускалося, що на БПЛА діє турбулентний боковий вітер, середньоквадратична миттєва швидкість якого дорівнює 2,5 м/с.

Виконавчий механізм БПЛА описується четвіркою:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_a & \mathbf{B}_a \\ \mathbf{C}_a & \mathbf{D}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/T_a & 1/T_a \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

де $T_a = 0,5$ – стала стану виконавчого механізму.

На вхід автопілота надходять сигнали від датчиків кута тангажа θ , кутової швидкості тангажа q і висоти h .

Для синтезу оптимального регулятора (що здійснюється на першому етапі NPRS-підходу) потрібно перш за все відновити стан системи, оскільки синтез оптимального регулятора передбачає, що стан системи повністю вимірюється. Але в зв'язку з тим, що на систему діє турбулентний вітер, середньоквадратичне значення якого 2,5 м/с, і доступні неповні та неточні виміри лише трьох параметрів, необхідно спочатку відновити стан системи, тобто синтезувати спостерігач.

Оптимальним спостерігачем для системи, на яку діють стохастичні збурення, є фільтр Калмана [2].

Система, для якої синтезується фільтр Калмана, є конкатенацією формуючого фільтра і БПЛА, що дає можливість врахувати стохастичний вплив атмосфери.

Крім системи, що описана у просторі станів, для синтезу фільтра Калмана потрібно задати значення матриць коваріацій шумів \mathbf{V}_1 , збурень, що діють на стан системи, і \mathbf{V}_2 шумів спостережень (формули (1)–(3)). Для нашого випадку вони мають такі значення:

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}.$$

У результаті синтезу оптимальної системи управління отримали оптимальний спостерігач.

Оскільки стан системи тепер повністю відновлено, можна застосувати процедуру синтезу оптимального регулятора. Для цього задаємо матриці вагових коефіцієнтів \mathbf{Q} , \mathbf{R} , що враховують вплив кожної змінної простору станів і управління відповідно (4). Для нашої системи вони мають такі значення:

$$\mathbf{R1} = [0.1 \ 1 \ 1 \ 5 \ 0.1 \ 1 \ 0.01 \ 0.01 \ 0.01];$$

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(\mathbf{R1}); \mathbf{R} = 1.$$

Результатом обчислень є коефіцієнти підсилення \mathbf{F} для кожної змінної стану системи:

$$\mathbf{F} = [-0.0073, 16.7393, -20.8339, -2.3834, -0.3162, 7.5676, -0.0250, -0.0029, -0.0463].$$

Ці коефіцієнти є початковими даними для процедури робастної оптимізації з використанням комплексного показника “робастність-якість”.

Отже, тепер є всі дані для синтезу спрощеного оптимального регулятора, що описується рівнянням (7).

Наступний етап – робастна оптимізація. З метою визначення значень вагових коефіцієнтів $\lambda(i)$ було виконано кілька “прогонів” процедури оптимізації.

Оптимальні значення всіх параметрів отримано при таких значеннях коефіцієнтів:

$$\lambda_{sn} = \lambda_{sp} = 0,5;$$

$$\lambda_{dn} = \lambda_{dp} = 0,15;$$

$$\lambda_{\infty} = \lambda_{\infty} = 0,5.$$

Після цієї процедури порядок системи було понижено за допомогою балансних моделей.

Грам'яни керованості для синтезованої робастної системи має вигляд:

$$\mathbf{g} = [0.0396, 0.0046, 0.0037, 0.0037, 0.0026, 0.0016, 0.0003, 0.0001, 0.0000]'$$

Використовуючи оператор „modred” та знехтувавши модами (4)–(9), що незначно вплинуло на якість отриманої системи, одержали регулятор 3-го порядку.

Матриці $[\mathbf{A}_r, \mathbf{B}_r, \mathbf{C}_r, \mathbf{D}_r]$ отриманого регулятора зі зниженим порядком такі:

$$\mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} 0.9998 & 0.003113 & 0.005769 \\ 0.002042 & 0.8708 & -0.4078 \\ -0.005346 & 0.2113 & -0.05438 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_r = \begin{bmatrix} 0.0007882 & -0.004071 & -9.012e-005 \\ 0.00211 & 0.021 & 0.006188 \\ -3.488e-005 & -0.05214 & 0.02806 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_r = [-0.004153 \ 0.0306 \ 0.05432];$$

$$\mathbf{D}_r = [0.000108 \ 0.0002029 \ -0.0005227].$$

Значення H_2 - та H_{∞} -норми для оптимальної О, номінальної n та збуреної p систем з повним та пониженим порядками, а також для робастної R номінальної n та збуреної p систем наведено в таблиці. Також було проведено моделювання перехідних процесів у номінальній та параметрично збуреній системах у середовищі SIMULINK. Результат моделювання ілюструють рис. 2–4.

Показники якості номінальної та збуреної моделей з повним і зниженим порядками

Норма		О з повним порядком	О з 3-м порядком	R з 3-м порядком
H_2^5	n	0,0093	0,0099	0,00046
	p	0,0057	0,0063	0,00013
H_2^d	n	0,0276	0,0287	0,0226
	p	0,0199	0,0207	0,0251
H_∞^d	n	1,6878	1,8322	1,1160
	p	1,7260	1,8849	1,0000

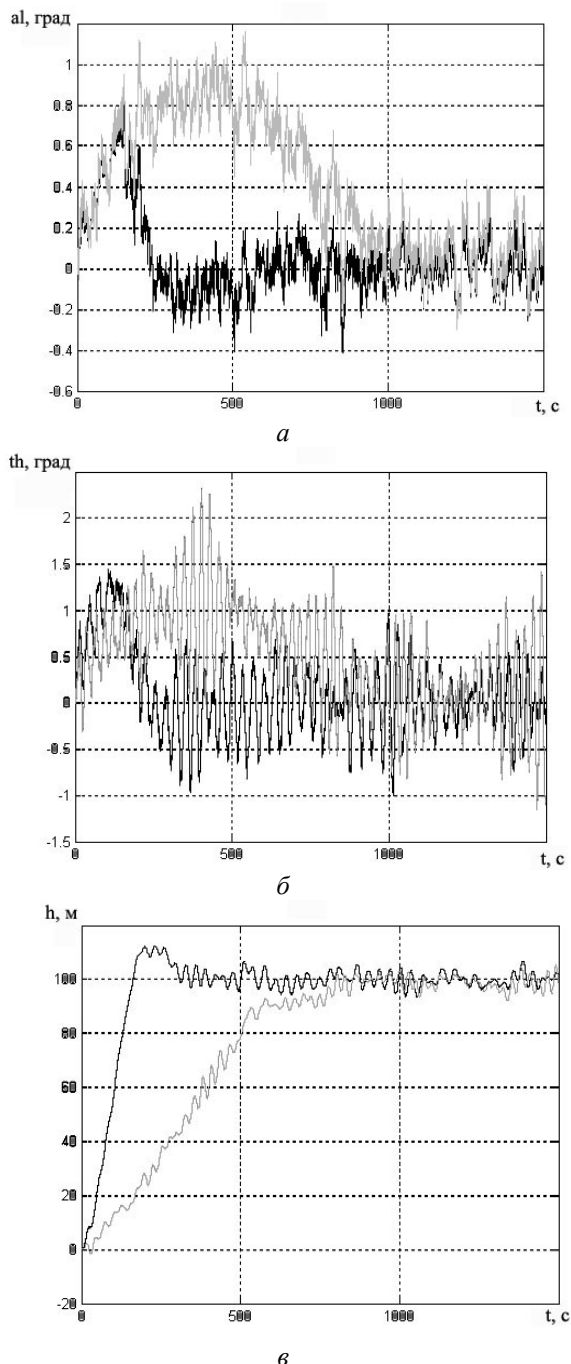


Рис. 2. Результати моделювання для номінальної (чорна лінія) та збуреної (сіра лінія) систем: а – перехідний процес за кутом атаки; б – перехідний процес за кутом тангажа; в – перехідний процес за висотою

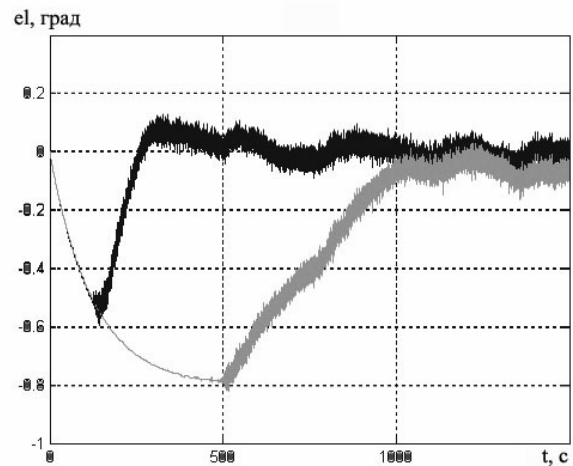


Рис. 3. Відхилення рулів висоти в номінальній (чорна лінія) та параметрично збуреній (сіра лінія) системах

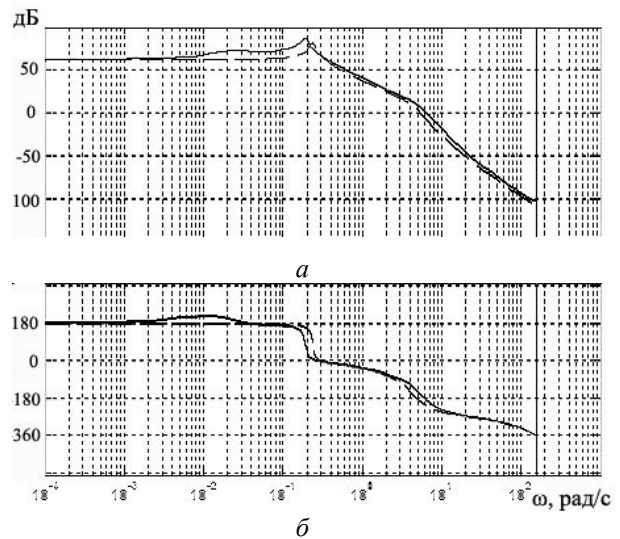


Рис. 4. Логарифмічні частотні характеристики замкненої номінальної (неперервна лінія) та збуреної (пунктирна лінія) системи: а – амплітудна логарифмічна частотна характеристика; б – фазова логарифмічна частотна характеристика

На рис. 2 для прикладу взято перехідні процеси за кутом атаки (α), кутом тангажа (θ) і висотою (h) для номінальної (чорна лінія) та параметрично збуреної (сіра лінія) моделей.

Відхилення рулів висоти (el) в номінальній (чорна лінія) та параметрично збуреній (сіра лінія) системах при дослідженні перехідних процесів показано на рис. 3.

Моделювання проведено з урахуванням усіх нелінійних функцій, які характерні реальному автопілоту, і за наявності турбулентного бокового вітру ($\sigma_w = 2,5$ м/с).

Порівняння отриманих кривих свідчить про близькість динаміки номінальної та збуреної систем.

Отже, оптимізація за використанням комплексного показника “робастність-якість” дозволяє

збільшити робастність оптимальної системи, що отримана за допомогою теореми розділення зі збереженням при цьому необхідної якості функціонування.

Слід зазначити, що пониження порядку після робастної оптимізації значно ефективніше, ніж в оптимальній системі (див. таблицю).

Пониження порядку в процесі робастної оптимізації здійснювати недоцільно. Це пов'язано з тим, що на певних етапах система або втрачає свою стійкість, або стає неспостережуваною, що призводить до зупинки процедури.

Висновки

Робастна оптимізація дозволяє покращити стійкість та якість цифрової системи, синтезованої з використанням теореми розділення при впливі стохастичних збурень. Така оптимізація також дозволяє більш ефективно знизити порядок отриманої системи управління.

Список літератури

1. *Tunik A. A., Galaguz T. A.* Robust stabilization and nominal performance of the flight control system for small UAV // *Applied and Computational Mathematics*. – 2004. – Vol. 3, №1. – P. 34–45.
2. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. – М.: Мир, 1977. – 464 с.
3. *Tunik Anatol A., Hyeok Ryu, Hae-Chang Lee.* Parametric optimization procedure for robust flight control system design // *KSAS International Journal*. – 2001. – Vol. 2, № 2, Nov. – P. 95–107.
4. *Tunik A. A., Abramovich E. A.* Parametric robust optimization of digital flight control systems // *Вісн. НАУ*. – 2003. – №2. – С. 31–37.
5. *Schoemig E., Sznaiar M.* Mixed H_2/H_∞ Control of multi-model plants // *Journal of Guidance Control and Dynamics*. – 1995. – № 3, May–Jun. – P. 525–531.
6. *Doyle J., Glover K., Khargonekar P., Francis B.* State-Space solution to standard H_2 and H_∞ control problems // *IEEE Trans. on Automatic control*. 1989. – Vol. 34, № 8, Aug. – P. 831–847.
7. *Kwakernaak H.* Robust Control and H_∞ -Optimization // *Tutorial paper Automatic*. – 1993. – Vol. 29, № 2. – P. 255–273.
8. *McLean D.* Automatic flight control systems. Prentice Hall Inc. – Englewood Cliffs, 1990. – 593 p.
9. *Larin V. B.* Stabilization of System by Static Output Feedback // *Appl. Comput. Math.* 1(2003). – №1. – P. 212–222.
10. *Skogestad S., Postlethwaite I.* Multivariable Feedback Control. Analysis and Design. – John Wiley & Sons, 1997. – 559 p.
11. *Медведев В. С., Потемкин В. Г.* Control System Toolbox. – М.: Диалог - МИФИ, 1999. – 287 с.
12. *Anderson B.D.O., Moore W. B.* Optimal Control Theory. – New York: John Willy & Sons, 1972. – 464 p.

Стаття надійшла до редакції 27.09.04.

А.А. Туник, Т.А. Галагуз

Структурно-параметрический синтез цифровой робастной системы управления

Рассмотрена проблема синтеза цифрового регулятора для системы при стохастических возмущениях и неполных измерениях вектора состояния, которая решается с использованием теоремы разделения. Показано, что параметрическая робастная оптимизация синтезированного регулятора используется для достижения качества и устойчивости номинальной и параметрически возмущенной систем. Приведен пример синтеза регулятора для малого беспилотного летательного аппарата.

A.A. Tunik, T.A. Galaguz

Structural-parametric synthesis of the digital robust flight control system

The paper is devoted to the synthesis of the digital controller for a system with stochastic disturbances and incomplete measurements of the state vector. Then parametric robust optimization of obtained system is conducted to achieve stabilization and acceptable performance for nominal and parametrically disturbed plants using the same controller. Research is performed at the example of the small Unmanned Aerial Vehicle flight control system.